# 第６講　波動Ⅱ

## 1

次の文を読んで，[　　　]には適した式または数値を，{　　　}からは適切なものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，[[　　　]]はすでに[　　　]で与えられたものと同じものを表す。また，問１～問３では，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

図１に示すように，一端に振動板(スピーカー)を取り付けた円筒形の透明な容器に，ふたをして空気を密閉し，水平に置いた。ふたは，容器内の気圧が外気圧と等しくなるように水平方向(図１の $x$ 軸方向)に動くが，音波によって振動することはないとする。また，この容器の内壁には，はじめ，軽い粉が水平方向に一様に薄く置かれている。容器内の空気は理想気体であるとする。

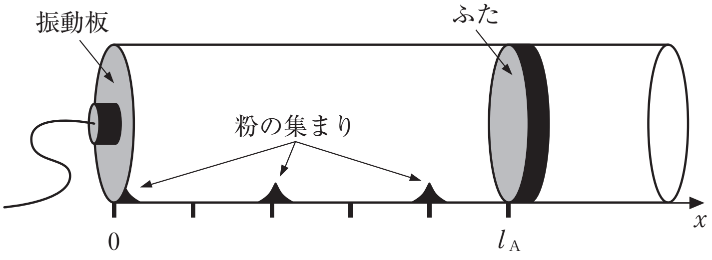
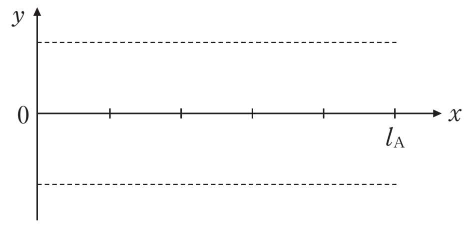



図１

まず，容器内の空気の絶対温度を $T_A$ にした。このとき，気柱の長さ(振動板からふたまでの距離)が $l_A$ になった。この状態で，振動板から単一振動数の音を発し，その振動数を変化させていったところ，振動数が $f$ のとき，図１に示すように容器内の３ヶ所(うち１ヶ所は振動板近傍)に等間隔に粉が集まり，気柱が共鳴を起こしていることがわかった。なお，図１の $x$ 軸は，気柱の左端を原点($x=0$)とした気柱の水平方向の座標軸であり，目盛りは $\frac{l_A}{5}$ の間隔で付けてある。

問１　粉の集まりの中心の位置(振動板近傍の集まりについては，振動板の位置 $x=0$)は，３ヶ所とも共鳴の定常波の腹の位置である可能性と，３ヶ所とも節の位置である可能性がある。また，この気柱の右端のふたは固定端であると考えてよいとする。気柱に生じた定常波による，ある時刻における各 $x$ での空気の変位 $y$ を，解答用紙のグラフに記入せよ。なお，グラフ中の破線は，その時刻における腹の位置での空気の変位を示す。空気の変位 $y$ は $x$ 軸の正の向きを正とする。

＜ Note ＞




気柱の共鳴音波の波長$\lambda_A$および気柱内の音速$V_A$は，$l_A$と$f$を用いて，それぞれ$\lambda_A=$［あ］，$V_A=$［い］と表される。なお，この気柱が共鳴を起こす最も低い振動数は$f$を用いて［う］と表される。

気柱に定常波がある場合の，気柱の各点での空気の変位と空気の密度との間の関係を考えよう。定常波がない場合に，位置$x$と$x+\Delta x$（$\Delta x$は正の微小量）の間の筒状の領域を筒領域Ⅰと呼ぶ（図２参照）。定常波がある場合に，位置$x$における空気の変位を$y$，位置$x+\Delta x$における空気の変位を$y+\Delta y$とすると，筒領域Ⅰ内にあった空気は位置［え］と［お］の間の筒領域Ⅱに移動する。したがって，この２つの筒領域の空気の密度の比は，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$を用いて

$$\frac{\text{定常波があるときの筒領域Ⅱの空気の密度}}{\text{定常波がないときの筒領域Ⅰの空気の密度}}=\text{［か］}$$

と表される。したがって，問１のグラフの曲線の｛き：①　$y$が最大　②　$y$が最小　③　傾きが最大　④　傾きが最小｝の位置$x$が空気の密度が最小になる位置である。

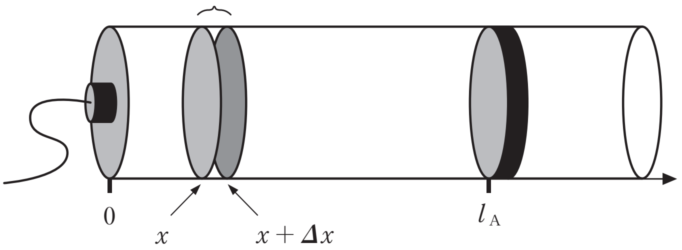



図２

問２　問１のグラフの$x$軸上に，問１で考えた時刻における空気の密度が最大となる位置のすべてに○印を，空気の密度が最小となる位置のすべてに×印を記入せよ。ただし，気柱の端点は除く。

次に，振動数$f$の音を振動板から発しながら，この容器内の空気の絶対温度を$T_A$から上げていくと，容器のふたが水平方向に動いていき，気柱の長さが$l_B$になった。このとき，気柱に再び共鳴が起こり，こんどは容器内の４ヶ所（うち１ヶ所は振動板近傍）に等間隔に粉が集まった。このときの，気柱の共鳴音波の波長$\lambda_B$は，$l_B$を用いて$\lambda_B=$［く］と表される。また，容器内の空気の絶対温度$T_B$を$l_A$，$l_B$，$T_A$を用いて表すと$T_B=$［け］である。

仮に，空気中の音速が温度によらず一定であれば，２つの波長$\lambda_A$と$\lambda_B$は等しいので，$\dfrac{l_B}{l_A}=$［こ］（数値）であり，絶対温度$T_B$は$T_A$を用いて$T_B=$［さ］と表される。

< Note >

しかし，実際には，空気中の音速は温度によって変化し，絶対温度 $T$ における音速 $V$ は

$$V = V_0 + bT \quad \cdots\cdots(1)$$

と表される。$V_0$ および $b$ は正の定数である。温度が高くなると音速は大きくなるので，比 $\dfrac{l_B}{l_A}$ は，音速が一定の場合の値 [ こ ] {し：①　より大きくなる　②　と同じである　③　より小さくなる}。

問３　上の実験における測定値 $f$，$T_A$，$l_A$，$l_B$ のみを用いて，式(1)の定数 $V_0$ と $b$ を表せ。ただし，導出の過程も示せ。

＜ Note ＞

2

次の文を読んで，□に適した式または数をそれぞれの解答欄に記入せよ。

格子定数 $d$〔m〕で $N$ 個のスリットを持つ回折格子に，図１のように波長 $\lambda$〔m〕の平行光線を垂直に入射させる。スリットを通って角度 $\theta$〔rad〕方向に回折する光を $d$ に比べて十分遠方の点で観測するとき，隣り合うスリットを通る光の道のりの差は［あ］〔m〕となり，位相差は $\Delta=$［い］〔rad〕である。そして，整数 $m$ を用い，$\Delta$ が［う］と表されるとき，全ての回折光が強め合って明線となる。以下，この位相差を $\Delta_m$〔rad〕とする。整数 $m$ を明線の次数という。

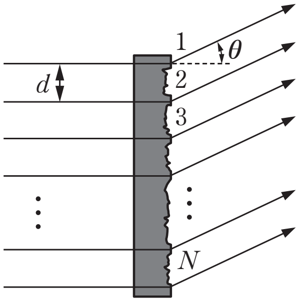
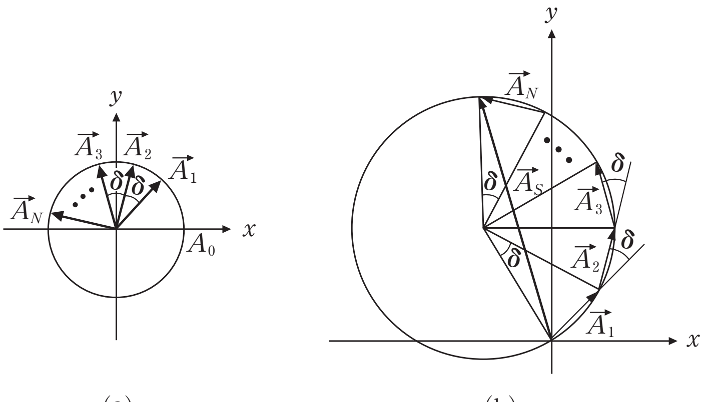



図１

光は一種の波動であり，正弦波で表すことができる。光の強度は振幅の２乗に等しいので，各スリットからの光の波の振幅を $A_0$ とすると，明線の位置での光の強度 $K_0$ は，$N$, $A_0$ を使って $K_0=$［え］と表される。実際には，明線と明線との間には弱い回折光が現れる。以下では，$m$ 次と $(m+1)$ 次の明線の間での回折光の振舞いを一般的に考察する。なお，必要に応じて，微小な角 $\alpha$ に対して，$\sin\alpha \fallingdotseq \alpha$，$\cos\alpha \fallingdotseq 1$ と近似してもよい。

観測点でのスリット１からの光の波の変位は，図２(a)のように，大きさ $A_0$ のベクトル $\overrightarrow{A_1}$ の $y$ 軸への射影に対応し，その位相は $x$ 軸と $\overrightarrow{A_1}$ とのなす角に対応する。ここで，$N$ 個の各スリットからの光の波を同じ大きさ $A_0$ を持つベクトル $\overrightarrow{A_1}$，$\overrightarrow{A_2}$，$\overrightarrow{A_3}$，…，$\overrightarrow{A_N}$ で表そう。隣り合うスリットからの光の位相差は全て $\Delta$ であるので，これらのベクトルは，$\Delta_m$ からのずれを $\delta=\Delta-\Delta_m$ として，図２(a)のように表される。重ね合わされた光のベクトル $\overrightarrow{A_S}=\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_N}$ は，図２(b)のように表せ，その強度は $|\overrightarrow{A_S}|^2$ で与えられる。




(a)　　(b)

図２

＜ Note ＞

図３(a)は，位相差 $\mathit{\Delta}$ を横軸にとり，$m$ 次と $(m\pm1)$ 次の明線を含む光の強度を示したものである。

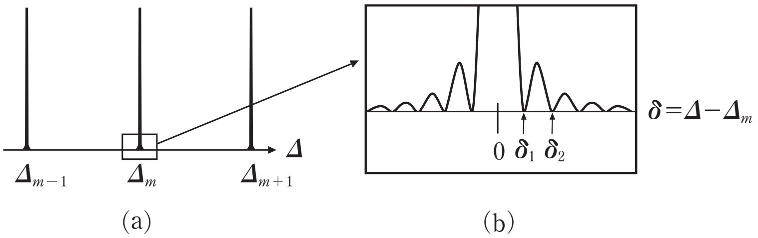



図３

図３(b)は，図３(a)の横軸を $\delta$ にとり，$m$ 次の明線の付近を拡大したものであるが，重ね合わされた光の強度 $|\overrightarrow{A_S}|^2$ が厳密に０となる点が存在する。これらの点は，図２(b)のベクトル $\overrightarrow{A_S}$ の大きさが０となる条件から決まる。$\delta=0$ から数えて $n$ 番目のこのような点は $\delta=$ **お** で与えられる。以下，これを $\delta_n$ と書く。

次に，任意の $\delta$ での回折光の強度 $|\overrightarrow{A_S}|^2$ を求める。図２(b)のように $\overrightarrow{A_1}$，$\overrightarrow{A_2}$，$\overrightarrow{A_3}$，…，$\overrightarrow{A_N}$ の始点と終点がすべて同一の円周上にあることに着目すると，$A_0$，$\delta$，$N$ を用いて $|\overrightarrow{A_S}|^2=$ **か** となる。図3(b)の $\delta_1$ と $\delta_2$ との間には極大値が現れるが，この値は $\delta=\dfrac{\delta_1+\delta_2}{2}$ での $|\overrightarrow{A_S}|^2$ の値 $K_1$ に非常に近い。この強度 $K_1$ と明線の位置での強度 $K_0$ の比は $N$ が非常に大きいときには一定の数となり，$\pi$ を用いて $\dfrac{K_1}{K_0}=$ **き** と書ける。したがって，この極大値は図３に示されるように，明線の位置での光の強度に比べて小さいことがわかる。

$m$ 次の明線の位相差 $\mathit{\Delta}_m$ に対応して $m$ 次の明線が観測される角度を $\theta_m$〔rad〕，位相差 $\mathit{\Delta}_m+\delta_1$ に対応して回折光の強度が０になる角度 $\theta_m'$〔rad〕を $\theta_m+\beta_m$ とする。角度 $\theta_m'$ 方向での隣り合うスリットからの光の道のりの差は，$\lambda$，$N$，$m$ を用いて **く** と表される。$N$ が非常に大きい時には，$\beta_m$ は非常に小さくなり $\beta_m=\dfrac{b_m}{N}$ と書け，$b_m$ は $d$，$\lambda$，$\theta_m$ を用いて $b_m=$ **け** と表される。

以上の考察から，非常に多数のスリットを持つ回折格子によって作られる明線は，非常に強く，鋭いピークを形成することが定量的に理解できる。

< Note >

# 第６講　確認テスト

次の文を読んで，［　　　］に適した式を，［［　　　］］には適切な数値をそれぞれの解答欄に記入せよ。

太陽光線が雨滴を通過するとき屈折と反射を起こし，雨上りの空に浮かぶ虹(にじ)は太陽を背にして約 42° の方向に円弧を描く。この角度はどのようにして決まるのだろうか。

(1)　図１のように光が空気中から入射角 $\alpha$ で水に入射する。入射した光の一部は，入射角と同じ角度 $\alpha$ で反射し，残りは屈折角 $\beta$ で水の中を進むとする。水の屈折率を $n$ とし，空気の屈折率を１とみなすと，$n$ は $\alpha$ と $\beta$ を用いて，

$n=$［あ］ ……………………………………………………………………(A)

で表される。

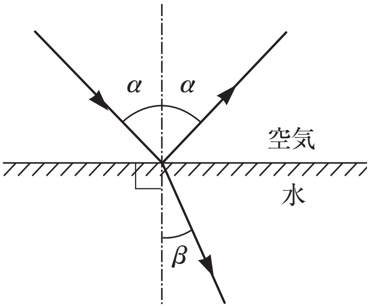



図１

(2)　次に，空気中に浮かんだ屈折率 $n$ の球形の水滴が太陽から平行光線を受けている場合を考えよう。図２において，球の中心Ｏに向かう光線 HO から距離 $d$ だけ離れた光線が点Ｐにおいて球に入射する。図のように入射角を $\alpha$，屈折角を $\beta$ とする。屈折光は点Ｑで球面に達し，その一部は屈折して空気中に出ていく。ここでは，点Ｑで反射し，点Ｒで屈折して空気中に出ていく光線を考えよう。このとき，∠PQO＝∠ORQ＝［い］であり，∠SRT＝［う］である。

図のように定義した HO と RT のなす出射角 $\theta$ は $\alpha$ と $\beta$ を用いて

$\theta=$［え］ ……………………………………………………………………(B)

と表される。

< Note >

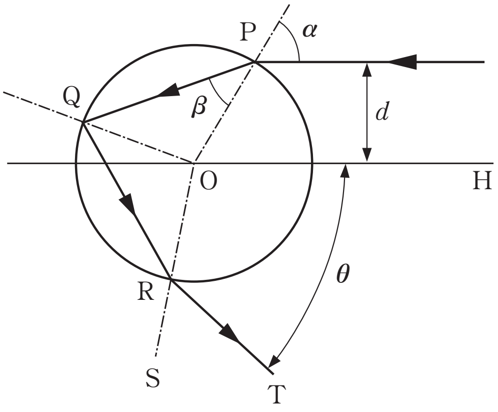



図２

(3)　距離 $d$ が 0 のとき，出射角 $\theta$ は 0 である。その状態から $d$ が大きくなるにつれて $\theta$ は，はじめは増加し，最大値 $\theta_0$ に達したのち減少する。$\theta$ が $\theta_0$ に近い値をとるときは，$d$ が変化しても出射角はほとんど変化しない。したがって，出射角 $\theta_0$ での光の強度は他の角度よりはるかに大きい。

距離 $d$ が変化すると，$\alpha$ も $\beta$ も変化する。$\theta$ が $\theta_0$ のときの $\alpha$ を $\alpha_0$ とし，$\beta$ を $\beta_0$ とする。この状態から $d$ がわずかに変化すると，$\alpha$ は $\alpha_0+\Delta\alpha$ へ，$\beta$ は $\beta_0+\Delta\beta$ へ変化し，$\theta$ は(B)式にしたがって $\theta_0$ から $\theta_0+\Delta\theta$ へ変化する。しかし，$\theta_0$ の近くでは $\theta$ はほとんど変化しないので，$\Delta\theta=0$ であると考えよう。そうすると，

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}=\boxed{\text{お}}$$

となる。一方，入射角 $\alpha=\alpha_0+\Delta\alpha$，屈折角 $\beta=\beta_0+\Delta\beta$ の場合も(A)式が成り立っている。

このとき，三角関数の公式

$$\sin(X+Y)=\sin X\cos Y+\sin Y\cos X$$

を用い，さらに，$\Delta\alpha$ も $\Delta\beta$ もじゅうぶん小さい場合の近似式

$$\cos\Delta\alpha\simeq1,\ \cos\Delta\beta\simeq1,\ \sin\Delta\alpha\simeq\Delta\alpha,\ \sin\Delta\beta\simeq\Delta\beta$$

を用いると，$\dfrac{\cos\alpha_0}{\cos\beta_0}$ は $\Delta\alpha$ と $\Delta\beta$ と $n$ で表される。ここで，$\dfrac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}=\boxed{\text{お}}$ を使うと，

$$\frac{\cos\alpha_0}{\cos\beta_0}=\boxed{\text{か}}\quad\cdots\cdots\text{(C)}$$

となる。(C)式と入射角が $\alpha_0$ の場合の(A)式を用いると，$\sin\beta_0$ が屈折率 $n$ のみで表され，$\sin\beta_0=\boxed{\text{き}}$ となる。同様に $\sin\alpha_0$ も $n$ のみで表される。

したがって $n$ によって $\alpha_0$ と $\beta_0$ が決まり，さらに(B)式により $\theta_0$ が求められる。実際，赤色の光に対する水の屈折率が 1.331 であるので，最大値 $\theta_0$ として 0.740 rad（＝42.4°）が得られる。

水の屈折率 $n$ は光の波長によってわずかに異なる。赤色の光に比べて紫色の光の屈折率は 1% 大きい。$n$ が増加すると，出射角 $\theta_0$ は減少する。したがって，虹の紫色の円弧は赤色の円弧の内側に見える。以上のことがらに基づいて約 42° の方向に七色の虹が見える。

< Note >

# 第６講　解答

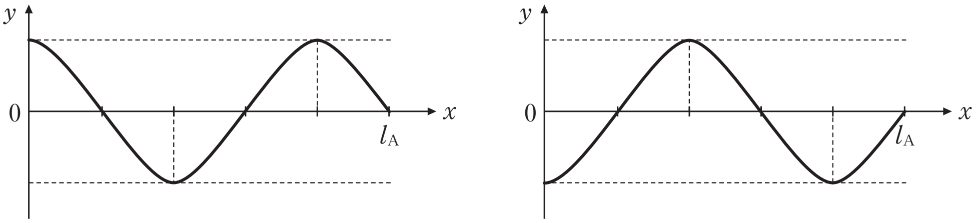
## 1

あ $\frac{4}{5}l_A$　い $\frac{4}{5}l_A f$　う $\frac{1}{5}f$　え $x+y$　お $x+\Delta x+y+\Delta y$

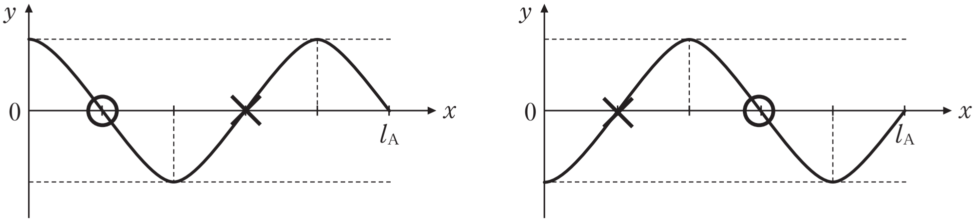
か $\dfrac{1}{1+\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$　き ③　く $\frac{4}{7}l_B$　け $\frac{l_B}{l_A}T_A$　こ $\frac{7}{5}$

さ $\frac{7}{5}T_A$　し ①

問１




問２




問３　$V_0=\dfrac{8fl_A l_B}{35(l_B-l_A)}$　$b=\dfrac{4fl_A(5l_B-7l_A)}{35(l_B-l_A)T_A}$

## 2

あ $d\sin\theta$　い $\dfrac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$　う $2\pi m$　え $N^2A_0{}^2$　お $\dfrac{2\pi n}{N}$

か $\dfrac{\sin^2\dfrac{N\delta}{2}}{\sin^2\dfrac{\delta}{2}}A_0{}^2$　き $\dfrac{4}{9\pi^2}$　く $\left(m+\dfrac{1}{N}\right)\lambda$　け $\dfrac{\lambda}{d\cos\theta_m}$

# 第６講　確認テスト

【解答】

あ $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$　い $\beta$　う $\alpha$　え $2(2\beta-\alpha)$　お $\dfrac{1}{2}$　か $\dfrac{1}{2}n$

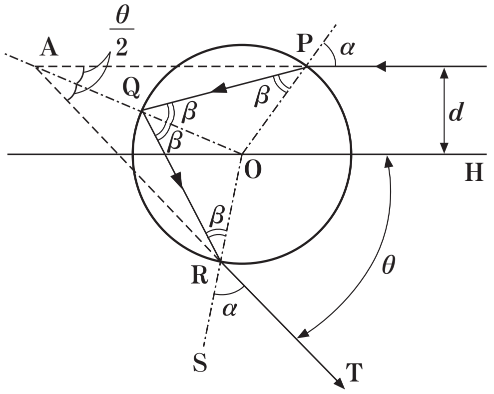
き $\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{4-n^2}{3}}$

【解説】

(1)

[あ] $n=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

(2)




[い] △OPQと△OQRは二等辺三角形, それと反射の法則より,

$\angle PQO=\angle ORQ=\beta$

[う] $n=\dfrac{\sin\angle SRT}{\sin\angle ORQ}$と[あ], [い]より, $\angle SRT=\alpha$

[え] $\theta=\angle PAR=2(2\beta-\alpha)$

(3)

[お] $\theta_0=2(2\beta_0-\alpha_0)$, $\theta_0+\Delta\theta=2\{2(\beta_0+\Delta\beta)-(\alpha_0+\Delta\alpha)\}$ かつ $\Delta\theta=0$より,

$2\beta_0-\alpha_0=2(\beta_0+\Delta\beta)-(\alpha_0+\Delta\alpha)$　　$\therefore\dfrac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}=\dfrac{1}{2}$

[か] $\sin(\alpha_0+\Delta\alpha)=\sin\alpha_0\underbrace{\cos\Delta\alpha}_{1}+\cos\alpha_0\underbrace{\sin\Delta\alpha}_{\Delta\alpha}\fallingdotseq\sin\alpha_0+\cos\alpha_0\cdot\Delta\alpha$

同様に,

$\sin(\beta_0+\Delta\beta)\fallingdotseq\sin\beta_0+\cos\beta_0\cdot\Delta\beta$

ゆえ,

$n=\dfrac{\sin(\alpha_0+\Delta\alpha)}{\sin(\beta_0+\Delta\beta)}\fallingdotseq\dfrac{\sin\alpha_0+\cos\alpha_0\cdot\Delta\alpha}{\sin\beta_0+\cos\beta_0\cdot\Delta\beta}$

他方, $n=\dfrac{\sin\alpha_0}{\sin\beta_0}$ も用いてまとめると,

$\dfrac{\cos\alpha_0}{\cos\beta_0}=n\cdot\dfrac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}=\dfrac{1}{2}n$

[き] $\cos^2\alpha_0+\sin^2\alpha_0=1$ と, [あ], [か]より, $\sin\beta_0=\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{4-n^2}{3}}$